

2018-2019 учебный год



МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЕСПУБЛИКАНСКОГО ЭТАПА

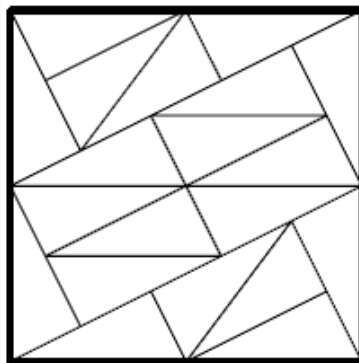
8 класс

1. 7744

Возможное решение.

Пусть a – первая и вторая цифры, b – третья и четвёртая. Тогда данное число равно $11(b + 100a)$, поэтому $b + 100a = 11x^2$ для некоторого натурального числа x . Кроме того, $100 \leq b + 100a \leq 908$, а значит, $3 \leq x \leq 9$. Вычисляя квадраты чисел 33, 44, ..., 99, получаем, что ровно один из них имеет требуемый вид: $88^2 = 7744$.

2. См. рисунок:

3. $a = 4, b = 6$ *Возможное решение.*

При $a \geq 5$ $a!$ чётно и кратно 5, то есть десятичная запись этого числа оканчивается нулём, а вся левая часть оканчивается цифрой 2. Следовательно, оно не может быть точным квадратом. Проверив значения $a = 1, 2, 3, 4$, получим ответ.

4. Например, 2, 2, 2, 2, $-1/15$. Возможны и другие примеры.

5. 40 столбов

Возможное решение.

Если число слева составлено из цифр a, b, c , то число справа составлено из цифр $a_1 = 9 - a, b_1 = 9 - b, c_1 = 9 - c$. Если $a = b = c$, то требуемое условие выполняется. Таких столбов ровно 10. Пусть теперь среди цифр a, b, c есть ровно две различных. Среди цифр a_1, b_1, c_1 будут в точности те же самые две цифры тогда и только тогда, когда эти цифры в сумме дают 9. Таких пар цифр 5: $(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6)$ и $(4, 5)$. Трёхзначных чисел, записывающихся двумя данными цифрами ровно шесть: три из них записываются двумя цифрами a и одной цифрой b , а ещё три – одной цифрой a и двумя цифрами b . Так мы получаем ещё $5 \times 6 = 30$ столбов.

6. Олег выигрывает

Возможное решение.

Пусть Олег возьмёт первым ходом цифру 3; тогда Вадим вынужден брать 4 (иначе Олег вторым ходом её возьмёт и выиграет, составив число 34). Заметим, что вторым своим ходом Вадим не выиграет, ибо единственное двузначное число, содержащее 4 в своей записи и делящееся на 17 – это 34. Далее Олег возьмёт 1, угрожая составить число 51 или число 136. Как показано выше, Вадим немедленно выиграть не может. Отразить обе указанные угрозы одновременно он тоже не может, следовательно, следующим ходом Олег выигрывает. *Существуют и другие выигрышные стратегии для Олега.*

7. 1, 5, 9, ..., 2017 (505 чисел)

Возможное решение.

Пример: выберем все числа вида $4k + 1$ (их 505). Разность каждых двух из них делится на 4 и, следовательно, не является простым числом.

Оценка: пусть выбрано число n . Тогда числа $n + 2$, $n + 3$, $n + 5$, $n + 7$ выбрать уже нельзя. А среди чисел $n + 1$, $n + 4$, $n + 6$ можно выбрать лишь одно. (Разность любых двух из них – простое число). Это значит, что из любых восьми подряд идущих чисел мы можем выбрать не более двух.

Числа от 1 до 2016 можно разбить на 252 восьмёрки.

Поэтому выбрать можно не более $2 \times 252 + 1 = 505$ чисел.

8. Возможное доказательство.

Пронумеруем все вертикали, начиная с самой левой, и все горизонтали, начиная с самой нижней, числами от 1 до 8. Тем самым, каждой ладье приписывается пара «координат». Сумму этих координат назовём весом ладьи. На каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит по одной ладье (поскольку ладьи не бьют друг друга), поэтому сумма S координат всех ладей равна $2 \times (1 + 2 + \dots + 8)$, то есть чётна. С другой стороны, чтобы вычислить сумму S , нужно просуммировать веса всех ладей. Однако, вес ладьи, стоящей на чёрной клетке, чётен, а вес ладьи, стоящей на белой клетке, нечётен. Поскольку S чётно, то количество нечётных слагаемых-весов чётно, то есть число ладей на чёрных полях чётно.